

Adı Soyadı :
Numara :

22.06.2022

MAT 302 DİFERENSİYEL GEOMETRİ II DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1: $\alpha: I \rightarrow E^3$, $\alpha(t) = (5 \sin t, 4 + 3 \cos t, 4 \cos t)$ eğrisinin

a) T, N, B Frenet 3-ayaklısını bulunuz, (10 Puan)

b) κ eğriliğini ve τ burulmasını bulunuz. (10 Puan)

SORU 2: $\alpha: I \rightarrow E^3$, $\alpha(t) = \left(\cos^2 t, \frac{\sin(2t)}{2}, t\sqrt{3} \right)$ eğrisinin teğetler göstergesinin bir düzlemsel eğri olduğunu gösteriniz.

SORU 3: $M = \{(x, y, z) \in E^3 \mid 2x + e^y \cos z = 0\}$ kümesi verilsin.

a) M kümesinin bir yüzey olduğunu gösteriniz, (10 Puan)

b) M yüzeyinin $P = (1, \ln 4, 0)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz. (10 Puan)

SORU 4: (M, N) Bertrand eğri çifti olsun. $M, N \subset E^3$ eğrileri sırasıyla $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verildiğine göre, $\forall s \in I$ için $d(\alpha(s), \beta(s)) = \text{sabit}$ dir, ispatlayınız.

SORU 5: $\alpha: I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve $\kappa > 0$ olsun. α bir helis ise $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir, gösteriniz.

Not: Her soru eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

CEVAP ANAHTARI

1) a) α yay parametrelidir mi?

$$\alpha'(t) = (5 \cos t, -3 \sin t, -4 \sin t) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{25 \cos^2 t + 25 \sin^2 t} = 5 \neq 1$$

olduğundan t yay parametresi değildir.

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\cos t, -\frac{3}{5} \sin t, -\frac{4}{5} \sin t \right) \text{ olur.}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \text{ bulunmalıdır.}$$

$$\alpha''(t) = (-5\sin t, -3\cos t, -4\cos t) \quad \text{dur. Boylece}$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 5\cos t & -3\sin t & -4\sin t \\ -5\sin t & -3\cos t & -4\cos t \end{vmatrix} = e_1 [12\sin t \cos t - 12\sin t \cos t] \\ - e_2 [-20\cos^2 t - 20\sin^2 t] \\ + e_3 [-15\cos^2 t - 15\sin^2 t] \\ = (0, 20, -15)$$

$$\text{olup } \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \quad \text{oldugundan}$$

$$B = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \quad \text{bulunur. Ayrica}$$

$$N = B \times T = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \cos t & -\frac{3}{5}\sin t & -\frac{4}{5}\sin t \end{vmatrix} = e_1 \left[-\frac{16}{25}\sin t - \frac{3}{5}\sin t\right] \\ - e_2 \left[\frac{3}{5}\cos t\right] + e_3 \left[-\frac{4}{5}\cos t\right] \\ = \left(-\sin t, -\frac{3}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\cos t\right)$$

bulunur.

$$b) \kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{25}{25} = \frac{1}{5} \quad \text{bulunur.}$$

$$\tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} \quad \text{birimindedir. } \alpha'''(t) = (-5\cos t, 3\sin t, 4\sin t)$$

dur. Boylece

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = \begin{vmatrix} 5\cos t & -3\sin t & -4\sin t \\ -5\sin t & -3\cos t & -4\cos t \\ -5\cos t & 3\sin t & 4\sin t \end{vmatrix} \\ = 5\cos t (-12\cos t \sin t + 12\sin t \cos t) + 3\sin t (-20\sin^2 t - 20\cos^2 t) \\ - 4\sin t (-15\sin^2 t - 15\cos^2 t) \\ = -60\sin t + 60\sin t \\ = 0$$

$$\Rightarrow \tau(t) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

2) α yoy parametrelidir mi?

$$\alpha'(t) = (-2\cos 2t \sin t, \cos 2t, \sqrt{3}) = (-\sin 2t, \cos 2t, \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t + 3} = 2 \neq 1$$

olduğundan t yoy parametresi değildir. Böylece

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(-\frac{1}{2} \sin 2t, \frac{1}{2} \cos 2t, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

olar. β eğrisi α nın teğetler gösterge eğrisi olmak üzere

$$\beta(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin 2t, \frac{1}{2} \cos 2t, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (\beta \text{ nın } k \text{ eğilimi için } k > 0 \text{ dir})$$

olar. β düzlemsel bir eğridir ancak β nın Z bileşeni 0 dir.

$$\tau = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = 0 \Leftrightarrow \det(\beta', \beta'', \beta''') = 0 \text{ dir.}$$

$$\beta'(t) = (-\cos 2t, -\sin 2t, 0), \quad \beta''(t) = (2\sin 2t, -2\cos 2t, 0)$$

$$\beta'''(t) = (4\cos 2t, 4\sin 2t, 0) \text{ olup}$$

$$\det(\beta', \beta'', \beta''') = \begin{vmatrix} -\cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ 2\sin 2t & -2\cos 2t & 0 \\ 4\cos 2t & 4\sin 2t & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{determinantın } 0 \text{ sütununa mensup})$$

olduğundan $\tau = 0$ olur. 0 halde α nın teğetler göstergesi olan

β düzlemseldir.

3) $F(x, y, z) = 2x + e^y \cos z$ fonksiyonunu aldım. Bu fonksiyon dif. bilirdir.

a) $\vec{\nabla} F = (2, e^y \cos z, -e^y \sin z)$ olup $\forall P = (P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{F}^3$ için

$$\vec{\nabla} F|_P = (2, e^{P_2} \cos P_3, -e^{P_2} \sin P_3) \neq (0, 0, 0)$$

olduğundan M, \mathbb{F}^3 de bir yüzeydir.

b) $P = (1, \ln 4, 0)$ noktasına göre $\vec{\nabla} F|_P = (2, e^{\ln 4} \cos 0, 0) = (2, 4, 0)$

dur. $\vec{\nabla} F|_P, P$ noktasındaki teget düzlemin normalidir. Teget düzlemin denklemine

$$ax + by + cz + d = 0$$

denirse $a=2, b=4, c=0$ olup denklem

$$2x + 4y + d = 0$$

dur. $P = (1, \ln 4, 0)$ noktası bu denklemi sağ br. 0 halde

$$2 + 4 \ln 4 + d = 0 \Rightarrow d = -2 - 4 \ln 4$$

olup P noktasından geçen teget düzlemin denklemi

$$2x + 4y - 2 - 4 \ln 4 = 0$$

olarak bulunur.

4. ve 5. soruların cevabı ders notunda mevcuttur.